

Cours 20

Application de l'exactitude à droite de $- \otimes_A M$
(et $M \otimes_A -$)

Prop Soit A un anneau commutatif (unitaire).

Soient I, J deux idéaux de A

$$A/I \otimes_A A/J \cong A/I+J \quad \text{comme } A\text{-mod.}$$

$$\text{ou } I+J = \{ i+j \mid \begin{matrix} i \in I \\ j \in J \end{matrix} \} \triangleleft A$$

Preuve: I est un sous-module de A (i.e. idéal)

$\Rightarrow$ on a une suite exacte courte

$$0 \rightarrow I \xrightarrow{\iota} A \rightarrow A/I \rightarrow 0 \quad (*)$$

(De même $0 \rightarrow J \rightarrow A \rightarrow A/J \rightarrow 0$ une suite exacte courte)

On applique $- \otimes_A A/J \cong (*)$, on obtient
une suite exacte à droite suivante:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \xrightarrow{\quad} & I \otimes_A A/J & \xrightarrow{f = \text{id} \otimes \eta_J} & A \otimes_A A/J & \rightarrow & A/I \otimes_A A/J \rightarrow 0 \\ & & \downarrow \text{id} & & \downarrow \text{id} & & \\ & & A/J & & A/J & & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} i \otimes [a] & \mapsto & i \otimes [a] \\ & & \downarrow \text{id} \\ & & [ia] \end{array}$$

$$\Rightarrow A/I \otimes_A A/J \cong \frac{A/J}{\{[i] \in A/J \mid i \in I\}} \cong \frac{A/J}{I/I+J}$$

$\begin{matrix} 2^{\text{ème}} \text{ isom.} \\ \& \downarrow \\ 3^{\text{ème}} \end{matrix}$

$$\frac{A}{I+J}$$

$$\square$$

Ex: $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} + m\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/\text{pgcd}(n,m)\mathbb{Z}.$

Exo: - k corps, K : une extension de corps k

$$k[x_1, \dots, x_n] \otimes_k K \cong K[x_1, \dots, x_n]$$

$$P \otimes \lambda \mapsto \lambda \cdot P$$

- A anneau, B = une A -algèbre, $A[x_1, \dots, x_n] \otimes_A B \cong B[x_1, \dots, x_n]$

Ex. $\frac{k[X]}{(f(X))} \otimes_k K \cong \frac{K[X]}{(f(X))}.$

Plus généralement =

• A : anneau, B = A -algèbre, $f(x) \in A[X]$

$$\left(\frac{A[X]}{(f(X))} \right) \otimes_A B \cong \frac{B[X]}{(f(X))}.$$

Preuve: $0 \rightarrow A[X] \xrightarrow{f} A[X] \rightarrow \frac{A[X]}{(f)} \rightarrow 0$ exacte

$$\xrightarrow{\otimes_A B}$$

$$A[X] \otimes_A B \xrightarrow{-f \otimes 1_B} A[X] \otimes_A B \rightarrow \frac{A[X]}{(f)} \otimes_A B \rightarrow 0 \text{ exacte}$$

$\downarrow$

$$B[X] \xrightarrow{-\cdot f} B[X] \quad \text{vu comme un polynôme à coeff. dans } B.$$

$$\Rightarrow A[X]/(f) \otimes_A B \cong B[X]/(f) \quad \square$$

§ Puissance tensorielle / symétrique / extérieure :

Soit A un anneau commutatif (unitaire)
(penser à $A = k$ corps).

Déf (puissance tensorielle)

Soit M un A -module.

$$\forall n, \quad T^n(M) := \underbrace{M \otimes_A M \otimes_A \dots \otimes_A M}_n \in A\text{-Mod.}$$

↑ on identifie toutes les possibilités d'assoc. grâce aux isom. canoniques (caract.) d'associativité.

$$T^\bullet(M) := \bigoplus_{n=0}^{\infty} T^n(M).$$

où par convention $T^0(M) := A$; $T^1(M) = M$

Lemme : (1) $T^n(M) \otimes_A T^m(M) \cong T^{n+m}(M) \quad \forall n, m \geq 0.$

(2) $T^\bullet(M)$ est une algèbre associative unitaire (graduée)
(non commutative en générale).

Preuve : ① L'associativité catégorique : "monoidalité".

② On définit

$$T^A(M) \times T^M(M) \xrightarrow{\otimes} T^{A \otimes M}(M)$$
$$(x_1 \otimes \dots \otimes x_n, y_1 \otimes \dots \otimes y_m) \mapsto x_1 \otimes \dots \otimes x_n \otimes y_1 \otimes \dots \otimes y_m$$

$$\left(\begin{array}{l} \text{Exo : définir proprement en utilisant} \\ \text{la propriété universelle suivante =} \\ \text{Prop : } M_1 \otimes_A M_2 \otimes_A \dots \otimes_A M_r \text{ vérifie la prop. univ. :} \\ \{ \text{Morph. } A\text{-multilin. de } M_1 \times \dots \times M_r \rightarrow N \} \\ \cong \text{Hom}_A(M_1 \otimes_A \dots \otimes_A M_r, N) \end{array} \right)$$

Vérifier : (Exo)

$\otimes$ est associatif.

$$(x_1 \otimes \dots \otimes x_n) \otimes (y_1 \otimes \dots \otimes y_m) \otimes (z_1 \otimes \dots \otimes z_l) = (x_1 \otimes \dots \otimes x_n) \otimes ((y_1 \otimes \dots \otimes y_m) \otimes (z_1 \otimes \dots \otimes z_l))$$

• distributivité

•

• graduée : $T^n(M) \otimes T^m(M) = T^{n+m}(M)$

□

⚠ Dans $T^*(M)$, $x \otimes y \neq y \otimes x$ en général.

Donc $T^*(M)$ n'est pas commutatif.

Lemme : Si M est un A -module libre avec base $\{e_1, \dots, e_n\}$, i.e. $M = \bigoplus_{i=1}^n A \cdot e_i$.

Alors $T^r(M)$ est aussi un A -module libre

de base $\{ e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_r} \mid i_1, \dots, i_r \in \{1, \dots, n\} \}$

En particulier

$$\text{rg}(T(M)) = \text{rg}(M)^r$$

Preuve: (Exo) utiliser: $(A^{\otimes n}) \otimes M = M^{\otimes n}$. □

Prop (Propriété universelle de $T(M)$) A comm. unitaire.

Soit $M \in A\text{-Mod}$, Soit B une A -algèbre ass.
(i.e. $A \xrightarrow{\varphi} B$ morphisme d'ann.)
 $1_A \mapsto 1_B$

On a une bijection:

$$\text{Hom}_{A\text{-Mod}}(M, B) \xleftarrow[\cong]{\Psi} \text{Hom}_{A\text{-algèbre}}(T(M), B)$$

$$(f|_M : M \rightarrow B) \longleftarrow (f : T(M) \rightarrow B)$$

Preuve: On définit

$$\text{Hom}_{A\text{-Mod}}(M, B) \xrightarrow{\Phi} \text{Hom}_{A\text{-algèbre}}(T(M), B)$$

$$(g : M \rightarrow B) \mapsto \left(\begin{array}{c} \Phi(g) : T(M) \longrightarrow B \\ \cup \\ \forall n \geq 1 \quad T^n(M) \\ x_1 \otimes \dots \otimes x_n \longmapsto g(x_1) \cdot g(x_2) \cdot \dots \cdot g(x_n) \end{array} \right)$$

Il est $a \mapsto \varphi(a)$ $\prod$ = produit dans B .
vérifier que $\Phi(g)$ est un morphisme de A -algèbres.

$$\cdot \Phi(g) \left((x_1 \otimes \dots \otimes x_n) \otimes (y_1 \otimes \dots \otimes y_m) \right) = \Phi(g)(x_1 \otimes \dots \otimes x_n) \cdot \Phi(g)(y_1 \otimes \dots \otimes y_m)$$

$$\cdot \Phi(g)(a) = a$$

$$\cdot \Phi \circ \Psi = \text{id}, \quad \Psi \circ \Phi = \text{id}$$

$$\begin{array}{ccc} & A & \\ \swarrow & & \searrow \varphi \\ T(M) & \xrightarrow{\Phi(g)} & B \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} & & g \\ M & \xrightarrow{\quad} & B \\ \downarrow & \nearrow \exists! & \\ T(M) & \xrightarrow{\Phi(g)} & \end{array}$$



Ex. A : anneau commutatif

$$\cdot \begin{array}{ccc} A[X] & \cong & T(A) \\ \parallel & & \uparrow \\ A\langle X \rangle & & \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{vu comme un } A\text{-module libre} \\ \text{de rg } 1 \end{array}$$

$$\cdot A\langle X_1, \dots, X_n \rangle \cong T(A^{\oplus n}) \quad \begin{array}{l} \text{--- } A\text{-module libre de rg} \\ n \end{array}$$

Puissance symétrique

A : ann. comm.

Déf $M \in {}_A \text{Mod}$

$$\text{Sym}(M) := T(M) / \langle x \otimes y - y \otimes x \mid x, y \in M \rangle$$

↑
idéal bilatère engendré.

Notation

$$x_1 \cdot \dots \cdot x_n := [x_1 \otimes \dots \otimes x_n] \quad \forall x_i \in M$$

En particulier, $x \cdot y = y \cdot x$

Plus généralement.

Lemme $\forall n, \forall \sigma \in S_n \quad \forall x_i \in M$, on a

$$x_1 \otimes \dots \otimes x_n = x_{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes x_{\sigma(n)}$$

$\in$ cet idéal bilatère.

Donc

$$x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n = x_{\sigma(1)} \cdot \dots \cdot x_{\sigma(n)} \in \text{Sym}(M)$$

Preuve : $\sigma =$ produit des transpositions.

(Exo)

e.g. $x_1 \otimes x_2 \otimes x_3 - x_3 \otimes x_2 \otimes x_1$

$$= (x_1 \otimes x_3 - x_3 \otimes x_1) \otimes x_2 + (x_2 \otimes x_1 \otimes x_3 - x_2 \otimes x_3 \otimes x_1)$$

$$+ (x_2 \otimes x_3 \otimes x_1 - x_3 \otimes x_2 \otimes x_1)$$

$$= (x_1 \otimes x_2 - x_2 \otimes x_1) \otimes x_3 + x_2 \otimes (x_1 \otimes x_3 - x_3 \otimes x_1)$$

$$+ (x_2 \otimes x_3 - x_3 \otimes x_2) \otimes x_1 \\ \in \text{l'idéal bilatère}$$

□

Prop (propriété universelle de Sym)
(A comm. unitaire)

Soit $M \in {}_A \text{Mod}$, Soit B une A -algèbre **Comm.**
(i.e. $A \xrightarrow{f} B$ morphisme d'ann.)
 $1_A \mapsto 1_B$

On a une bijection :

$$\text{Hom}_{A\text{-mod}}(M, B) \xleftarrow[\cong]{\Psi} \text{Hom}_{A\text{-alg.}}(\text{Sym}(M), B) \\ (f|_M : M \rightarrow B) \longleftarrow (f : \text{Sym}(M) \rightarrow B)$$

i.e.

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & B \\ \downarrow & \nearrow & \\ \text{Sym } M & \xrightarrow{\exists! \text{ morph. d'alg. comm.}} & \end{array}$$